Cinématique du point 13

La cinématique est une partie de la mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements, indépendamment des causes qui les ont produits. Dans ce chapitre, on fixe le cadre de l'étude mécanique, on définit la notion de point en physique et on décrit les outils qui permettent de décrire géométriquement sa position, sa vitesse et son accélération au cours du temps.

1 Notion de point en physique

Aucun objet physique n'est rigoureusement ponctuel au sens mathématique du terme. Pour étudier la mécanique du point, il faut donc préciser dans quelles conditions un objet mécanique peut être modélisé par un point.

1.1 Définition d'un solide

Un solide est système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres. Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres :

- les trois coordonnées d'un point du solide (on considère souvent la position de son centre de gravité G) ;
- trois angles qui définissent l'orientation d'un repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude (voir figure 13.1).

Dans le cadre de la cinématique, les solides sont supposés indéformables. On exclut donc toute déformation et toute rupture du solide de cette étude.

1.2 Définition d'un point

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même. Pour repérer complètement un point dans l'espace, il suffit de donner trois paramètres : ses trois coordonnées.

En dynamique, on a besoin de définir sa masse. Cela mène à la notion de point matériel. Ce n'est pas nécessaire en cinématique.

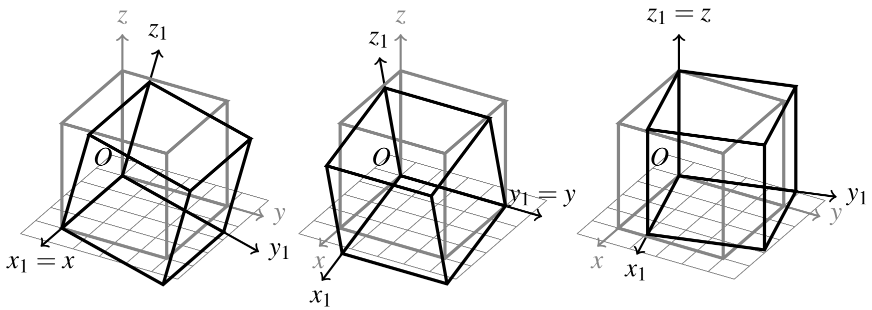

Figure 13.1 – Cube de sommet O fixe repéré dans l'espace. À gauche, le cube a tourné autour l'axe (Ox) ; au centre, autour de (Oy) et à droite, autour de (Oz). Le cas général est composé de ces trois rotations. Il faut donc trois angles pour déterminer l'orientation d'un cube dans l'espace.

1.3 Quand peut-on assimiler un système à un point ?

La question n'a pas de réponse simple et on doit se référer à la définition : tout dépend si on peut négliger son extension spatiale et sa rotation sur lui-même.

Exemple

Le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil dans le référentiel de Copernic s'inscrit sur une trajectoire quasi-circulaire de centre confondu avec le centre du Soleil et de rayon orbital $d_{ST} = 150.10^6$ km. L'extension spatiale de la Terre (son rayon $R_T = 6400$ km) est négligeable devant le rayon orbital : $R_T \ll d_{ST}$. On peut négliger l'extension de la Terre et sa rotation sur elle-même et l'assimiler à un point matériel lors de l'étude de son mouvement orbital.

Par contre, si l'on étudie le mouvement de rotation propre de la Terre autour de son axe Nord-Sud dans le référentiel géocentrique pour connaître la durée du jour, on ne peut négliger ni l'extension de la Terre, ni sa rotation sur elle-même. On ne peut pas assimiler la Terre à un point matériel lors de l'étude de sa rotation propre.

2 Repérage d'un point du plan

2.1 Intérêt d'avoir plusieurs systèmes de coordonnées

Lors d'expériences de mécanique, on repère le mouvement d'un point au cours du temps. La trajectoire suivie par le mobile peut prendre des formes très différentes. Si l'on considère trois mouvements plans vus au lycée, différents paramétrages géométriques sont utilisés, qui correspondent à différents systèmes de coordonnées.

Exemple

Lors d'une chute libre, la trajectoire suivie par le mobile est une portion de droite. On repère son mouvement sur un axe à l'aide d'un repérage cartésien réduit à un axe.

On lâche un petit objet sans vitesse initiale depuis l'origine du repère à $t_0 = 0$ s dans le champ de pesanteur terrestre. Il chute verticalement sur une trajectoire rectiligne dirigée vers le bas et à l'instant t, on le repère par son abscisse $x(t)$ sur un axe gradué. Le mouvement est rectiligne accéléré.

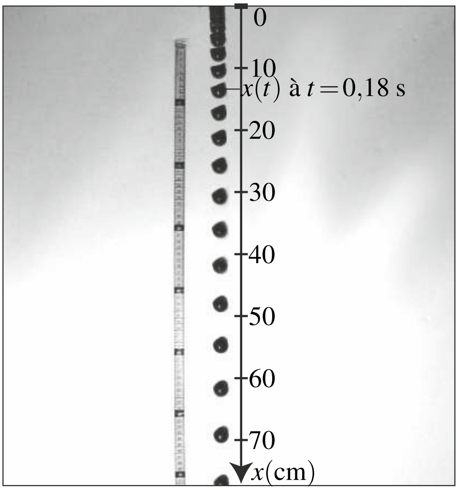

Figure 13.2 – Chronophotographie d'un petit objet en chute libre. Le mètre permet d'obtenir l'échelle. Fréquence de prise de vue : 50 images par seconde. Vitesse d'obturation : $(1/1000)$ s.

Exemple

Lors d'un vol balistique, la trajectoire suivie par le mobile est une parabole. On repère son mouvement dans un plan à l'aide d'un repérage cartésien à deux dimensions.

On lance un petit objet avec une vitesse initiale depuis l'origine du repère à $t_0 = 0$ s dans le champ de pesanteur terrestre. La vitesse initiale de norme $\simeq 2{,}5$ m·s^{-1} fait un angle $\simeq 60°$ sur l'horizontale. L'objet effectue un vol balistique suivant une trajectoire plane. À l'instant t, on repère sa position par ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. C'est un repérage cartésien de la position.

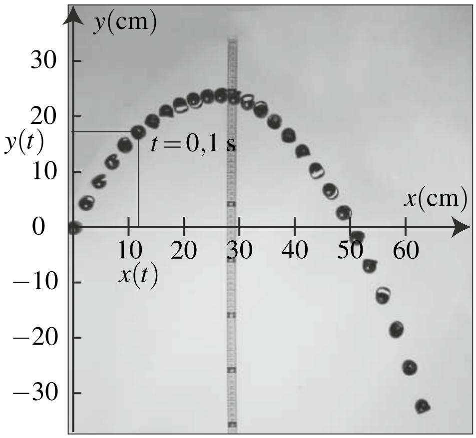

Figure 13.3 – Chronophotographie d'un petit objet en vol balistique. Le mètre permet d'obtenir l'échelle. Fréquence de prise de vue : 50 images par seconde. Vitesse d'obturation : $(1/1000)$s.

Exemple

Lors d'un mouvement circulaire et uniforme, la trajectoire suivie par le mobile est un cercle. On repère son mouvement sur un cercle à l'aide d'un repérage polaire.

Un petit objet est posé sur un plateau à une distance $r = 30$ cm de l'axe de rotation du plateau qui tourne à vitesse angulaire constante dans le sens trigonométrique. La position à l'instant t est repéré par la donnée de l'angle $\theta(t)$. C'est un repérage polaire de la position.

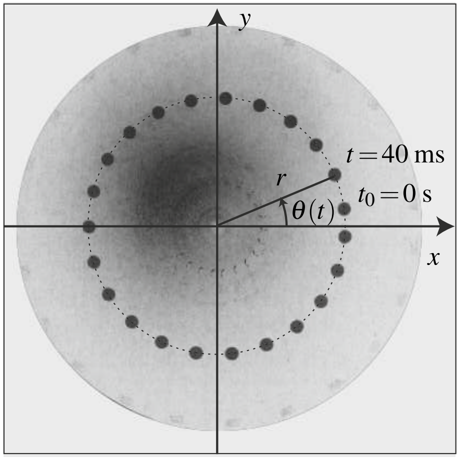

Figure 13.4 – Chronophotographie d'un petit objet en mouvement circulaire et uniforme. Fréquence de prise de vue : 25 images par seconde. Vitesse d'obturation : $(1/500)$s.

2.2 Repérage d'un point sur une droite.

Ce système de coordonnées est utilisé pour repérer un point M sur une droite fixe $\mathscr{D}$. Il est adapté à l'étude des mouvements rectilignes.

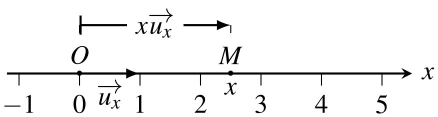

Figure 13.5 – Repérage d'un point sur une droite

On place un point O et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ sur la droite $\mathscr{D}$. Le point M est repéré sur la droite orientée $(O, \overrightarrow{u_x})$ par la valeur algébrique $\overline{OM} = x$, appelée coordonnée de M.

- $x > 0$ si $\overrightarrow{OM}$ est dans le sens de $\overrightarrow{u_x}$ donc si M est à droite de O sur le schéma ci-dessus.
- $x < 0$ si $\overrightarrow{OM}$ est dans le sens opposé à $\overrightarrow{u_x}$ donc si M est à gauche de O.

Sur la droite (Ox), un point M de coordonnée x est noté $M(x)$. Son vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x}.$$

2.3 Repérage d'un point dans le plan

Pour repérer un point M dans un plan fixe $\mathscr{P}$, on utilise les systèmes de coordonnées cartésien ou polaire. Ces systèmes de coordonnées sont adaptés à l'étude des mouvements plans. Suivant les cas, on choisit un repérage cartésien ou un repérage polaire. Le repérage polaire est particulièrement indiqué pour les mouvements circulaires.

a) Coordonnées cartésiennes

Description Le repérage cartésien consiste à quadriller le plan à l'aide d'une grille carrée. Les points du plan sont repérés par leurs coordonnées sur deux axes orthogonaux comme sur la figure 13.6.

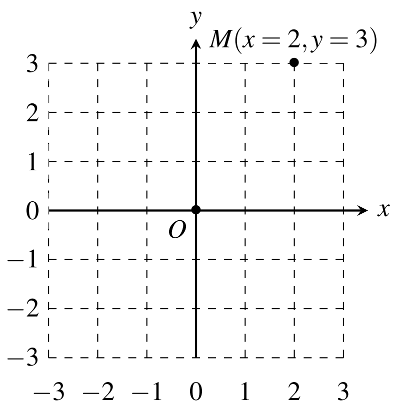

Figure 13.6 – Quadrillage cartésien du plan. M a pour coordonnées cartésiennes $x = 2$ et $y = 3$.

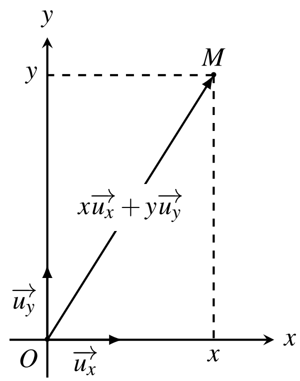

Figure 13.7 – Repérage d'un point M du plan (xOy) en coordonnées cartésiennes.

Système de coordonnées : repérage d'un point du plan On place un point O et deux vecteurs fixes $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ dans le plan $\mathscr{P}$ tels que le doublet $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ forme une base orthonormée directe de ce plan. Le point M est repéré par deux paramètres géométriques x et y où :

- x est la coordonnée du projeté orthogonal de M sur l'axe orienté $(O, \overrightarrow{u_x})$;
- y est la coordonnée du projeté orthogonal de M sur l'axe orienté $(O, \overrightarrow{u_y})$.

Dans le plan (Oxy), un point M de **coordonnées cartésiennes** x et y est noté $M(x, y)$. Son vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y},$$

où x et y sont les projections orthogonales de $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$.

Base de projection : repérage d'un vecteur du plan Le doublet $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ forme une **base de projection fixe** du plan $\mathscr{P} = (Oxy)$. Tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\overrightarrow{w} = w_x \overrightarrow{u_x} + w_y \overrightarrow{u_y} \quad \text{noté} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}.$$

w_x et w_y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Ce sont les projections orthogonales de $\overrightarrow{w}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. En particulier, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$ est noté :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le repérage cartésien est le plus naturel dans le cas des mouvements plans, mais il n'est pas toujours le plus pertinent. Il faut avoir à l'esprit le système de coordonnées polaires, notamment dans le cas des mouvements circulaires.

b) Coordonnées polaires

Description Le repérage polaire consiste à quadriller le même plan $\mathscr{P}$ à l'aide d'une grille centrée sur un point O du plan. Les points du plan sont alors repérés par leur distance à O et un angle mesuré par rapport à un axe fixe comme sur la figure ci-dessous.

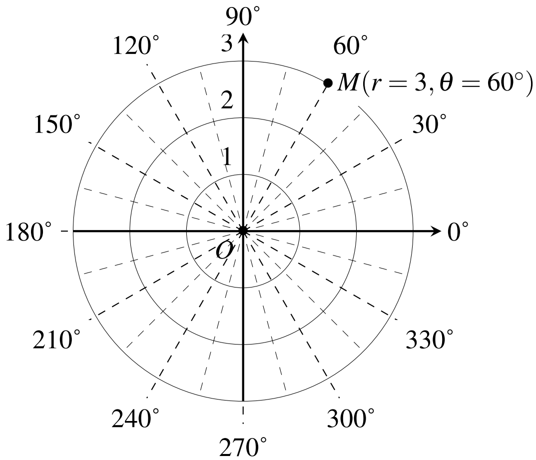

Figure 13.8 – Quadrillage du plan en coordonnées polaires. Le point M a pour coordonnées polaires $r = 3$ et $\theta = 60°$.

Système de coordonnées : repérage d'un point du plan En général, on utilise le point O et le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ des coordonnées cartésiennes pour définir la droite orientée (Ox) prise comme référence des angles. Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ où :

- θ est l'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur $\overrightarrow{u_x}$;
- r est la distance OM. C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $r = ||\overrightarrow{OM}||$.

Un point M de coordonnées polaires r et θ est noté $M(r,\theta)$ et il faut avoir en tête que :

- par définition, r étant une distance, elle est à valeur positive ;
- pour décrire l'intégralité du plan, θ doit varier sur un intervalle de largeur 2π radian, le plus souvent $\theta \in [0;2\pi[$.

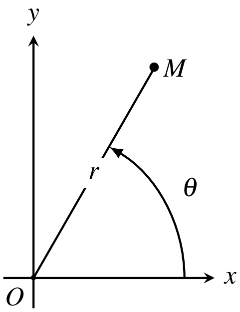

Figure 13.9 – Repérage d'un point M du plan en polaires.

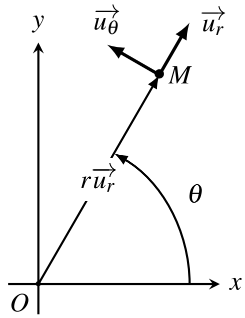

Figure 13.10 – Base polaire locale pour un point M du plan.

Base de projection : repérage d'un vecteur du plan On définit la **base de projection mobile** $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ orthonormée directe adaptée aux coordonnées polaires de la manière suivante :

- $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||};$$

- $\overrightarrow{u_\theta}$ est obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{u_r}$ d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$rad.

> Dans le plan (Oxy), un point M de **coordonnées polaires** r et θ est noté $M(r,\theta)$. Le vecteur position s'écrit :
>
> $$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r},$$
>
> où r est la distance OM.

La base de projection $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ est définie pour une position donnée du point M. Elle est donc définie localement en tout point M et tourne pour que le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ pointe toujours de O vers M. Pour ces raisons, la base $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ est appelée **base locale** ou **base mobile**.

> **Remarque**
>
> Le lecteur attentif aura noté que les vecteurs de base $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ sont définis en un point M donné et que M doit être différent de O. Cependant, étant donné que les vecteurs ne sont pas attachés à un point, ils sont parfois reportés de M à O pour améliorer la clarté des figures.

Pour un point M donné, le doublet $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ forme une base mobile du plan $\mathscr{P}$. Tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{w} = w_r \overrightarrow{u_r} + w_\theta \overrightarrow{u_\theta} \quad \text{noté} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_r \\ w_\theta \end{pmatrix}.$$

- w_r est la composante du vecteur $\overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{u_r}$ appelée **composante radiale** ;
- w_θ est la composante du vecteur $\overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$ appelée **composante orthoradiale**.

w_r et w_θ sont les projections orthogonales de $\overrightarrow{w}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$. En particulier, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⚠ Il ne faut pas confondre les coordonnées du point M et les composantes du vecteur position. Ces deux notions mathématiques, qui coïncident en coordonnées cartésiennes, ne sont plus du tout les mêmes en coordonnées cylindriques.

3 Repérage d'un point dans l'espace

3.1 Repérage cartésien

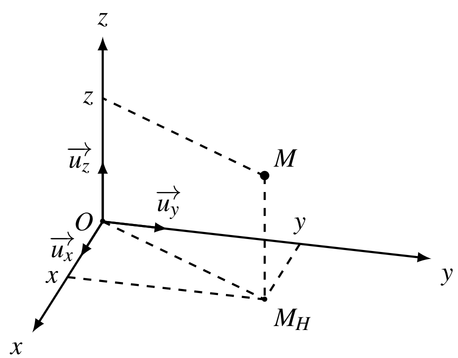

Figure 13.11 – Repérage d'un point M dans l'espace en coordonnées cartésiennes. Le projeté de M sur le plan (Oxy) noté M_H est repéré en coordonnées cartésiennes planes. M est alors à une « altitude » z de M_H selon l'axe (Oz).

La définition des coordonnées cartésiennes utilisée dans le plan peut être étendue à un repérage dans l'espace à trois dimensions en rajoutant un axe (Oz) orienté orthogonal au plan (Oxy). L'orientation de (Oz) est celle du vecteur $\overrightarrow{u_z}$ choisi pour que le triplet $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe (voir annexe mathématique). Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ vaut alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} \quad \text{noté} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3.2 Repérage cylindrique

La définition des coordonnées polaires utilisée dans le plan peut être étendue à un repérage dans l'espace à trois dimensions en rajoutant un axe (Oz) orthogonal au plan (Oxy). On obtient alors le **système de coordonnées cylindriques**. L'orientation de (Oz) est celle du vecteur $\overrightarrow{u_z}$ choisi pour que le triplet $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ vaut alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \quad \text{noté} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

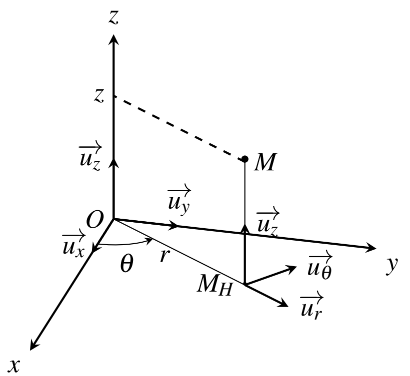

Figure 13.12 – Repérage d'un point M dans l'espace en coordonnées cylindriques. Le projeté de M sur le plan (Oxy), noté M_H, est repéré en coordonnées polaires planes. M est alors à une « altitude » z de M_H selon le vecteur $\overrightarrow{u_z}$.

3.3 Repérage sphérique

Description Le repérage sphérique d'un point M consiste à repérer le point par la distance OM, puis sa position sur la sphère de rayon OM par deux angles (voir figure 13.13). Comme il s'agit d'un repérage courant en géographie, le vocabulaire qui suit est emprunté aux géographes.

On appelle équateur le cercle marquant l'intersection de la sphère avec le plan (Oxy) et plan équatorial le plan de l'équateur. Un parallèle est un cercle de la sphère parallèle à l'équateur. On repère un parallèle par sa latitude.

L'axe (Oz) est l'axe Nord/Sud. Un méridien est un cercle qui contient l'axe Nord/Sud de la sphère. On repère un méridien par sa longitude. Un plan qui contient un méridien est un plan méridien. Il contient également l'axe Nord/Sud.

Le point M est situé à l'intersection d'un parallèle et d'un méridien. On le repère par sa longitude et sa latitude.

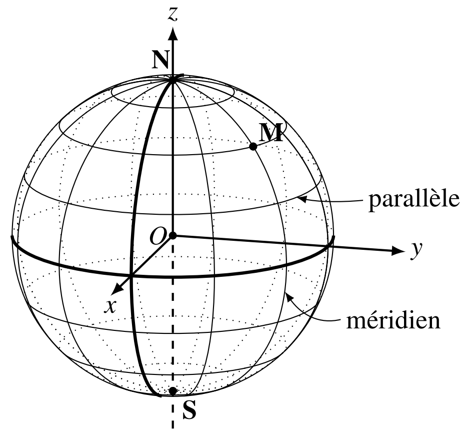

Figure 13.13 – Quadrillage d'une sphère de rayon OM en coordonnées sphériques. Les méridiens sont tracés tous les $30°$ de longitude. Les parallèles tracés ont pour des latitudes $\pm 15°$, $\pm 45°$, $\pm 75°$. Le point M a pour coordonnées $60°$ de longitude et $45°$ de latitude.

Système de coordonnées : repérage d'un point de l'espace En général, on utilise le méridien du plan (Oxz) des coordonnées cartésiennes comme référence des longitudes φ. On délaisse la latitude λ au profit de la co-latitude $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$.

Le point M est repéré par ses coordonnées sphériques r, θ et φ où :

- r est la distance OM. C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $r = ||\overrightarrow{OM}||$;
- la longitude φ permet de repérer le plan méridien. C'est l'angle orienté que fait le plan méridien passant par M avec le plan méridien (Oxz) pris comme référence des longitudes ;
- la co-latitude θ permet de repérer le point M dans le plan méridien. C'est l'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur $\overrightarrow{u_z}$.

Un point M de coordonnées sphériques r, θ et φ est noté $M(r, \theta, \varphi)$ et il faut noter que :

- par définition, r étant une distance, elle est à valeur positive
- pour décrire l'intégralité de l'espace, θ doit varier sur l'intervalle $[0; \pi]$ et φ sur l'intervalle $[0; 2\pi[$.

⚠ Il faut veiller à toujours prendre $\theta \in [0; \pi]$ et $\varphi \in [0; 2\pi[$. On justifiera ce choix plus tard mais il faut dès à présent en avoir conscience pour éviter des problèmes de signe.

Base de projection : repérage d'un vecteur On définit la base mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ orthonormée directe adaptée aux coordonnées sphériques de la manière suivante :

- $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux de $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ un vecteur unitaire du plan méridien orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ donc tangent au méridien passant par M et dirigé dans le sens où θ augmente ;
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ un vecteur unitaire tel que la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ soit orthonormée directe. $\overrightarrow{u_\varphi}$ est perpendiculaire au plan méridien. Il est tangent au parallèle passant par M.

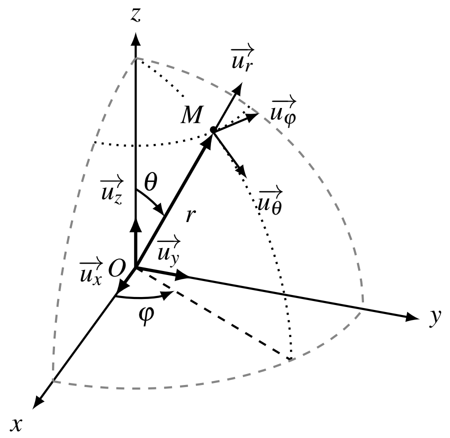

Figure 13.14 – Repérage d'un point M en coordonnées sphériques.

Un point M de l'espace de **coordonnées sphériques** r, θ et φ est noté $M(r,\theta,\varphi)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r},$$

où r est la distance OM.

La base de projection $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$ est définie pour une position donnée du point M. Elle est définie localement en tout point M et tourne pour que le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ pointe toujours de O vers M. Pour un point M donné, le triplet $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$ forme une base mobile de l'espace. Tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de l'espace peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{w} = w_r\overrightarrow{u_r} + w_\theta\overrightarrow{u_\theta} + w_\varphi\overrightarrow{u_\varphi} \quad \text{noté} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\varphi \end{pmatrix}.$$

w_r est la composante du vecteur $\overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{u_r}$ appelée composante radiale. Les autres composantes n'ont pas de dénominations particulières.

w_r, w_θ et w_φ sont les projections orthogonales de $\overrightarrow{w}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$. En particulier, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⚠ Encore une fois en coordonnées sphériques, il ne faut pas confondre les coordonnées du point M et les composantes du vecteur position.

4 Cinématique du point

4.1 Notion de référentiel

a) Exemple introductif

On considère un observateur O_1 situé dans un train qui avance à vitesse uniforme sur des rails rectilignes. Un observateur O_2 est posté au bord des rails et voit le train passer de gauche à droite. L'observateur O_1 situé dans le train lâche une petite balle, qui rebondit à ses pieds et remonte dans sa main. Le mouvement est rectiligne (Figure 13.15). L'observateur O_2 observe le même mouvement. Il voit la balle suivre une trajectoire parabolique vers le bas puis parabolique vers le haut pour remonter dans la main de l'observateur O_1 (Figure 13.15). Le mouvement de la balle observé par les deux observateurs est différent. La description d'un même phénomène dépend de l'observateur. Pour pouvoir comparer les observations des deux observateurs, il faut impérativement qu'ils précisent le cadre spatio-temporel de leurs observations : ils doivent préciser le référentiel d'étude.

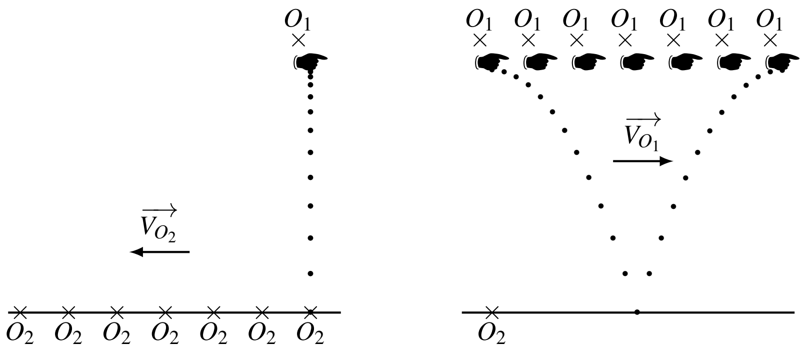

Figure 13.15 – À gauche, mouvement de la balle tel qu'observé par l'observateur O_1. À droite, mouvement de la balle tel qu'observé par l'observateur O_2.

b) Définition

Le **référentiel** d'une étude mécanique est le cadre spatio-temporel de l'étude. Pour le définir, on a besoin de deux repères : un repère de temps et un repère d'espace.

Relativité du mouvement La description du mouvement du système dépend du référentiel dans lequel on l'étudie, on parle de relativité du mouvement. Pour une étude mécanique, il faut systématiquement préciser le référentiel d'étude.

Exemple

Pour fixer les idées, on va décrire les référentiels de l'exemple introductif.

Le référentiel $\mathscr{R}_1$ de l'observateur O_1 lié au train est caractérisé par un repère de temps et un repère d'espace fixe par rapport au train d'origine O_1 et d'axes dirigés vers l'avant du wagon, vers sa gauche et vers le haut. L'observateur O_1 mesure le mouvement par rapport à ce référentiel $\mathscr{R}_1$. Dans ce référentiel, la vitesse initiale de la balle est nulle et son mouvement est rectiligne selon la verticale.

Le référentiel $\mathscr{R}_2$ de l'observateur O_2 lié au sol est caractérisé par un repère de temps et un repère d'espace fixe par rapport au sol d'origine O_2 et d'axes dirigés vers la droite de l'observateur, vers l'avant de l'observateur et vers le haut. L'observateur O_2 mesure le mouvement par rapport à ce référentiel $\mathscr{R}_2$. Dans ce référentiel, la balle a une vitesse initiale dirigée vers la droite et son mouvement est un mouvement parabolique.

c) Repère de temps

Pour dater un événement, on a besoin d'un repère de temps constitué :
- d'une mesure de temps définie par l'unité de durée : la seconde de symbole s ;
- d'une origine des temps.

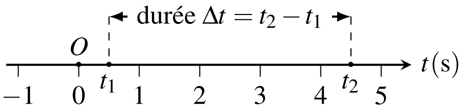

Figure 13.16 – Repérage d'un instant sur la flèche du temps.

On définit alors un vocabulaire scientifique précis sur cette flèche du temps :
- un instant est un point de la flèche du temps ;
- l'origine des dates est un instant particulier choisi comme instant zéro ;
- une date t repère la position d'un instant sur la flèche du temps. C'est la durée séparant l'origine des temps et cet instant. Une date est une grandeur algébrique : elle est positive si l'instant t est postérieur à l'instant initial et négative s'il est antérieur à l'instant initial.
- une durée $\Delta t = |t_2 - t_1|$ est la largeur d'un intervalle de temps séparant deux instants de dates t_1 et t_2. Une durée est positive.

> **Remarque**
>
> L'origine des temps n'a pas de sens physique (seules les durées en ont) et peut être modifiée si nécessaire. La seconde est définie au niveau international par un traité diplomatique appelé *Convention du Mètre*. La définition de la seconde a varié dans l'histoire des sciences. Elle est actuellement définie à l'aide d'horloges atomiques.

d) Repère d'espace

Pour repérer un point dans l'epace, on a besoin d'un repère d'espace constitué :
- d'une mesure d'espace définie par l'unité de longueur : le mètre, symbole m ;
- d'une origine d'espace : un point fixe dans le référentiel d'étude ;
- de trois directions orthogonales fixes repérées par 3 axes vu précédemment.

Remarque

L'origine et l'unité de longueur sont arbitraires. L'origine n'a pas de sens physique et peut être modifiée si nécessaire. Le mètre est défini au niveau international par la *Convention du Mètre*. La définition du mètre a varié dans l'histoire des sciences. Il est actuellement défini à partir de la seconde et de la vitesse de la lumière. En effet, la vitesse de la lumière est une constante universelle fixée par convention à la valeur de $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Fixer l'unité de temps fixe automatiquement l'unité de longueur.

4.2 Vecteurs position, déplacement, vitesse et accélération

Soit O un point fixe du référentiel d'étude $\mathscr{R}$ et M un point mobile.

a) Vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position. Son évolution temporelle $\overrightarrow{OM}(t)$ est donnée par les **équations horaires** du mouvement.
La courbe décrite par le point M au cours du mouvement est la **trajectoire** du point M.

Remarque

La notion de temps n'est plus présente dans la notion de trajectoire.

b) Vecteur déplacement

On considère que le mobile M est situé au point $M(t)$ à l'instant t et au point $M(t+\Delta t)$ à l'instant $t+\Delta t$.

Entre t et $t+\Delta t$, M se déplace de $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$ appelé **vecteur déplacement**.

✎ En physique, la notation Δf est utilisée pour parler de la différence entre la valeur finale f_{finale} et la valeur initiale f_{initiale} de f : $\Delta f = f_{\text{finale}} - f_{\text{initiale}}$.

Ici, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ évolue entre $\overrightarrow{OM}(t)$ (valeur initiale) et $\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)$ (valeur finale) donc $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$.

c) Vecteur déplacement élémentaire

Lorsque la durée Δt devient très faible, on la note $\mathrm{d}t$ et on parle de durée élémentaire ou infinitésimale. Pendant cette durée $\mathrm{d}t$, le mobile M passe du point $M(t)$ au point $M(t+\mathrm{d}t)$.

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, M se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$. C'est le **déplacement élémentaire** ou infinitésimal.

De part sa définition, le déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire.

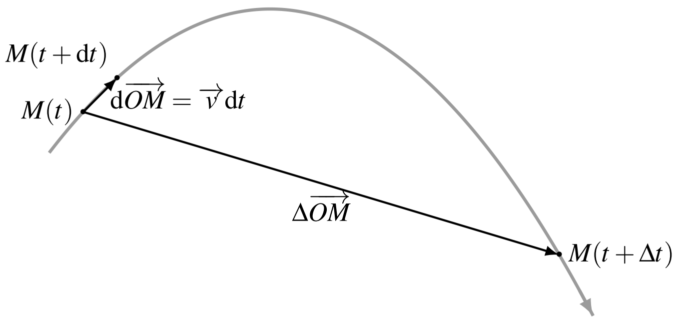

Figure 13.17 – Vecteurs déplacement et déplacement infinitésimal sur une trajectoire tracée en gris et décrite dans le sens de la flèche. Lorsque la durée Δt du déplacement devient infinitésimale et égale à $\mathrm{d}t$, le déplacement $\Delta\overrightarrow{OM}$ devient infinitésimal et égal à $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, tangent en $M(t)$ à la trajectoire.

d) Vecteur vitesse

Le vecteur **vitesse moyenne** entre l'instant t et l'instant $t+\Delta t$ est défini par le rapport du vecteur déplacement à la durée de ce déplacement :

$$< \overrightarrow{v} >= \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}.$$

Lorsque l'intervalle de temps devient infinitésimal, ce rapport devient le vecteur **vitesse instantanée** :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}.$$

C'est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. La norme de ces vitesses se mesure en $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

e) Lien entre le déplacement élémentaire et la vitesse

La dérivée temporelle, en physique comme en mathématique, est la limite du taux de variation lorsque l'intervalle de temps entre deux mesures devient très petit. L'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ et le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ ont un sens et une existence propre en physique. Ils correspondent à la notion de différentielle en mathématique.

Le vecteur déplacement élémentaire est la différentielle du vecteur position et s'exprime en fonction de la vitesse de la manière suivante :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)} = \overrightarrow{v}\mathrm{d}t.$$

La vitesse est colinéaire au déplacement élémentaire. Comme lui, elle est parallèle à la trajectoire.

Remarque

La durée infinitésimale dt peut devenir aussi courte que l'on veut ; le déplacement infinitésimal également. On écrit alors :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\overrightarrow{OM} & = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} & = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}. \end{cases}$$

Le vecteur vitesse est bien la dérivée temporelle du vecteur position.

f) Vecteur accélération

Le vecteur accélération moyenne entre l'instant t et un instant $t+\Delta t$ est défini par le rapport de la variation du vecteur vitesse à la durée Δt :

$$<\overrightarrow{a}>= \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t)-\overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}.$$

Lorsque l'intervalle de temps devient infinitésimal, ce rapport devient le vecteur accélération instantanée :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}.$$

La norme de ces accélérations se mesure en m·s^{-2}.

5 Utilisation des différents systèmes de coordonnées

5.1 Coordonnées cartésiennes

a) Cas d'un mouvement plan

Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que le mouvement est réalisé dans le plan (Oxy). On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au repère d'espace fixe (Oxy). On utilise la base de projection $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ fixe dans $\mathscr{R}$ pour exprimer les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération.

b) Vecteur position

L'expression du vecteur position a été déterminée précédemment pour un point $M(x,y)$. Le point M se déplace au cours du temps donc ses coordonnées x et y sont maintenant des fonctions du temps et :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y}.$$

c) Déplacement élémentaire

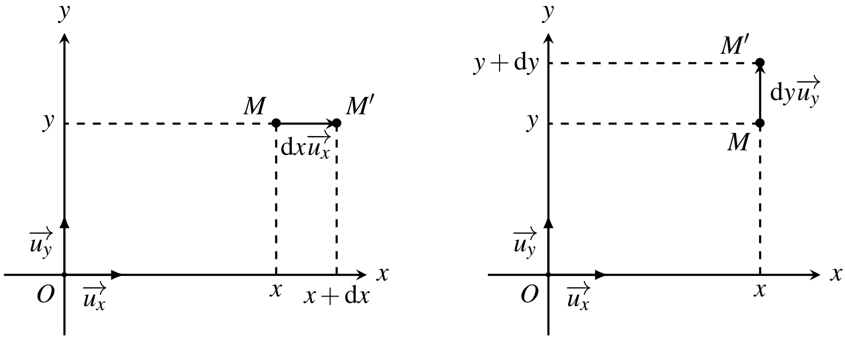

Figure 13.18 – Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes. M' est tel que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. À gauche, x varie à y fixé ; à droite, y varie à x fixé.

Lorsque x varie de dx à y fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}$. Lorsque y varie de dy à x fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\overrightarrow{u_y}$ et vaut $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y}$. Les coordonnées x et y étant indépendantes et la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où x et y varient simultanément en sommant ces deux expressions :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y}.$$

d) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y}.$$

En notant $\dot{x}$ le rapport $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ qui est également la dérivée temporelle de x, et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, on obtient l'expression de la vitesse :

$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y}.$$

> **Remarque**
>
> Cela revient à dériver le vecteur position terme à terme, en utilisant le fait que les vecteurs de la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ sont fixes donc indépendant du temps.

e) Vecteur accélération

On continue alors la dérivation terme à terme de la vitesse pour trouver le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}.$$

f) Généralisation : mouvement dans l'espace repéré en cartésien

On peut généraliser l'analyse du mouvement pour un point M se déplaçant dans l'espace à trois dimensions en introduisant le point M_H, projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy). On obtient alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_H} + \overrightarrow{M_HM}.$$

Le point M_H est repéré en coordonnées cartésiennes dans le plan (Oxy). Le point M est repéré sur l'axe orienté $(M_H, \overrightarrow{u_z})$ par sa coordonnée z. On obtient alors les caractéristiques des mouvements de M par sommation des mouvement de M_H dans le plan (Oxy) et de M sur la droite $(M_H, \overrightarrow{u_z})$.

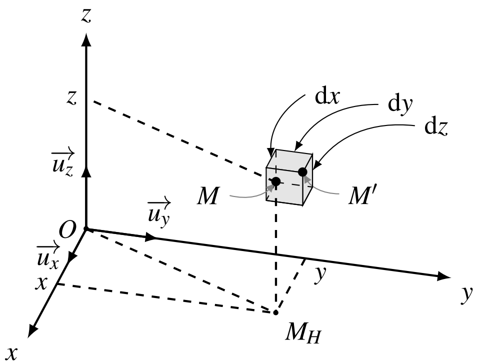

Figure 13.19 – Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes. M' est tel que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

g) Bilan en repérage cartésien

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes exprimés sur la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ sont respectivement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

5.2 Coordonnées cylindro-polaire

a) Coordonnées polaires

Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que le mouvement s'inscrit sur le plan (Oxy). On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au repère d'espace fixe (Oxy). On utilise la base de projection $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ mobile dans $\mathscr{R}$ pour exprimer les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération du point M.

b) Vecteur position

L'expression du vecteur position a été déterminée précédemment pour un point $M(r,\theta)$. Le point M se déplace au cours du temps donc ses coordonnées r et θ sont maintenant des fonctions du temps. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}(t).$$

⚠ Une nouveauté intervient en coordonnées polaires : le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ suit le point M au cours de son mouvement et évolue au cours du temps. $\overrightarrow{u_r}$ est donc une fonction du temps.

c) Déplacement élémentaire

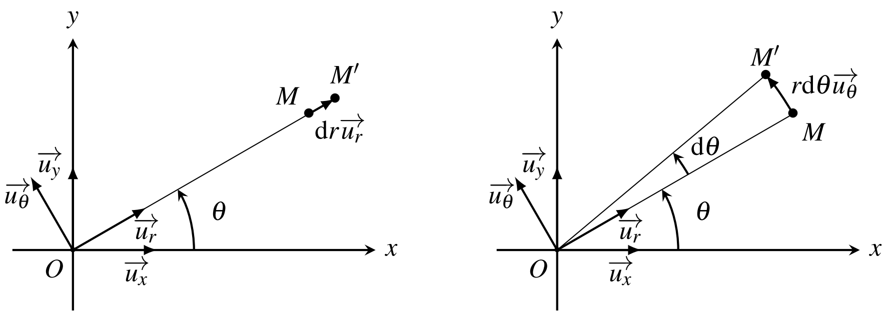

Figure 13.20 – Déplacement élémentaire en coordonnées polaires. M' est tel que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. À gauche, r varie à θ fixé ; à droite, θ varie à r fixé.

Lorsque r varie de dr à θ fixé, le déplacement a lieu selon le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ et vaut : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}$.
Lorsque θ varie de dθ à r fixé, le déplacement a lieu selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et vaut : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$.
Les coordonnées r et θ étant indépendantes et la base $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où r et θ varient simultanément en sommant ces deux expressions :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}.$$

⚠ L'orientation de l'angle θ et le choix du vecteur de base $\overrightarrow{u_\theta}$ sont liés. $\overrightarrow{u_\theta}$ est dirigé dans le sens où θ augmente. Il faut toujours le vérifier sur son schéma. Une erreur d'orientation entraîne automatiquement des erreurs de signe.

d) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u_\theta}.$$

On obtient alors l'expression du vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}.$$

> **Remarque**
>
> On peut également trouver le vecteur vitesse en dérivant le vecteur position par rapport au temps :
>
> $$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(r(t)\vec{u_r}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t}.$$
>
> On peut alors conjecturer que la dérivée de $\vec{u_r}$ par rapport au temps vaut $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u_\theta}$. C'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

e) Vecteur accélération

Pour trouver le vecteur accélération, on ne peut plus utiliser de méthode géométrique simple. On va donc dériver le vecteur vitesse par rapport au temps. Pour cela, on doit établir les expression des dérivées temporelles de $\vec{u_r}$ et de $\vec{u_\theta}$.

Expression des vecteurs de la base mobile dans la base fixe On peut passer de la base de projection mobile à la base de projection fixe grâce aux figures de projection suivantes :

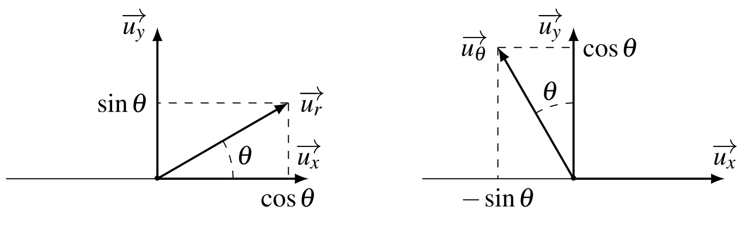

Figure 13.21 – Figures de projection des vecteurs de la base mobile dans la base cartésienne fixe.

Cela permet de trouver l'expression des vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ dans la base fixe $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$:

$$\begin{cases} \vec{u_r} & = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u_y} \\ \vec{u_\theta} & = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u_y}. \end{cases}$$

> **Remarque**
>
> Il est conseillé de réaliser ces figures avec $0 < \theta < 90°$ et θ nettement inférieur à 45° afin de distinguer nettement que $\cos\theta > \sin\theta > 0$. On peut alors vérifier que l'on ne s'est pas trompé ni sur les signes, ni sur le choix entre $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

Dérivation des vecteurs de la base mobile Lorsque le point M se déplace au cours du temps, r et θ varient. On voit sur la figure 13.20 qu'une variation de r ne fait pas bouger la base mobile, tandis qu'une variation de θ fait tourner la base mobile d'un angle $\mathrm{d}\theta$. Cette dépendance en θ de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ se voit également dans leurs expressions dans la base cartésienne exprimées ci-dessus.
Dans un premier temps, on dérive $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport à θ :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}\theta} & = -\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} & = -\cos\theta\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\overrightarrow{u_y} = -\overrightarrow{u_r} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{d}\overrightarrow{u_r} & = \mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta} & = -\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_r}. \end{cases}$$

On en déduit leurs dérivées par rapport au temps, qu'il faut absolument connaître :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{dt} & = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{dt} & = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}. \end{cases}$$

> **Remarque**
>
> On retrouve bien $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ que l'on avait conjecturé précédemment.

Calcul du vecteur accélération Il ne reste plus qu'à dériver le vecteur vitesse terme à terme pour trouver le vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &= \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}(\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}.$$

f) Généralisation : mouvement à trois dimensions en coordonnées cylindriques

On peut généraliser l'analyse du mouvement pour un point M se déplaçant dans l'espace à trois dimensions en introduisant le point M_H, projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy). On obtient alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_H} + \overrightarrow{M_H M}.$$

Le point M_H est repéré en coordonnées polaires dans le plan (Oxy). Le point M est repéré sur l'axe orienté $(M_H, \overrightarrow{u_z})$ par sa coordonnée z. On obtient alors les caractéristiques du mouvement de M par sommation des mouvements de M_H dans le plan (Oxy) et de M sur la droite $(M_H, \overrightarrow{u_z})$.

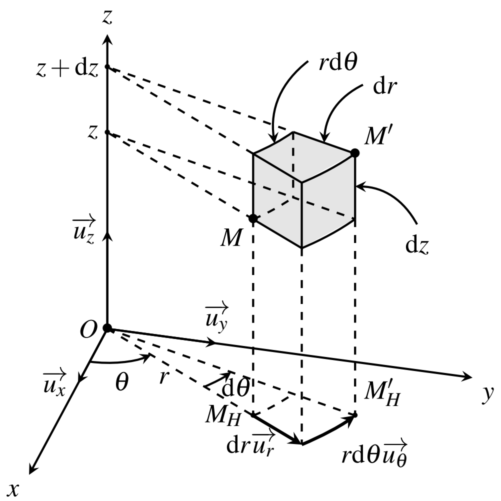

Figure 13.22 – Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques. M' est tel que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Le déplacement de M est la somme du déplacement de M_H dans le plan (Oxy) repéré en polaire et du déplacement de M par rapport à M_H selon l'axe $(M_H, \overrightarrow{u_z})$.

g) Bilan en repérage cylindro-polaire

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées polaires exprimés sur la base mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ sont respectivement

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \; ; \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ r\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, il faut retenir que $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} & = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} & = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}. \end{cases}$

5.3 Coordonnées sphériques

a) Coordonnées sphériques

Le point M est repéré dans son mouvement à trois dimensions par ses coordonnées sphériques. On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au repère d'espace fixe $(Oxyz)$. On utilise la base de projection $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ mobile dans $\mathscr{R}$. L'expression de l'accélération est difficile à obtenir dans cette base et on se contentera ici d'exprimer les vecteurs position, déplacement élémentaire et vitesse du point M.

b) Vecteur position

L'expression du vecteur position a été déterminée précédemment pour un point $M(r, \theta, \varphi)$. Le point M se déplace au cours du temps donc ses coordonnées r, θ et φ sont des fonctions du temps. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}(t).$$

Le fait que θ et φ dépendent de temps implique que le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ dépend du temps.

c) Déplacement élémentaire

On considère un point situé en M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) à l'instant t et qui arrive en un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$. On note M_V la projection de M sur l'axe « vertical » (Oz).

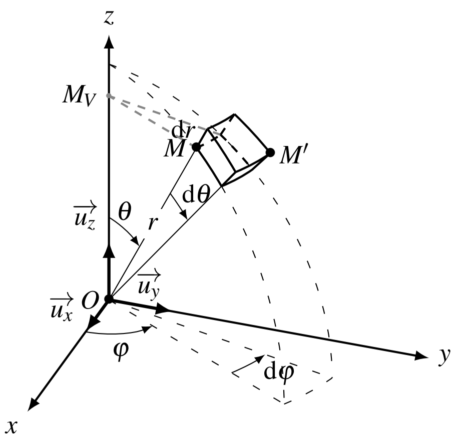

Figure 13.23 – Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

Un déplacement à φ fixé correspond à un déplacement dans le plan méridien tandis qu'un déplacement à r et θ fixés correspond à un déplacement sur le parallèle passant par M.

Lorsque r varie de dr à θ et φ fixés, le déplacement a lieu selon $\overrightarrow{u_r}$ et vaut :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}.$$

Lorsque θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r et φ fixés, le déplacement a lieu selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et vaut :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}.$$

Lorsque φ varie de $\mathrm{d}\varphi$, à r et θ fixés, le déplacement a lieu sur le parallèle passant par M de rayon $r\sin\theta$ et de centre M_V. Il se fait selon le vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ et vaut :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}.$$

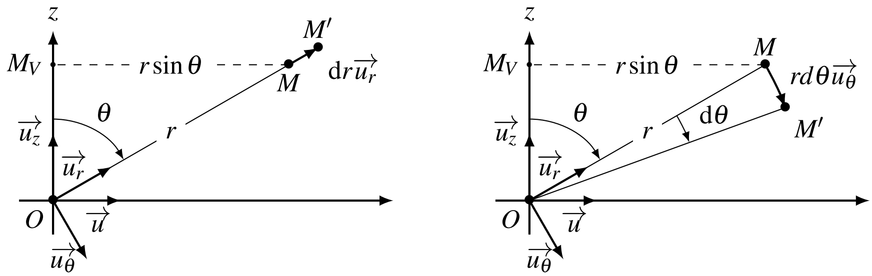

Figure 13.24 – Déplacement de M sur le plan méridien contenant M à φ fixé. Dans ce plan, M est repéré en coordonnées polaires. À gauche, r varie à θ et φ fixés ; à droite, θ varie à r et φ fixés.

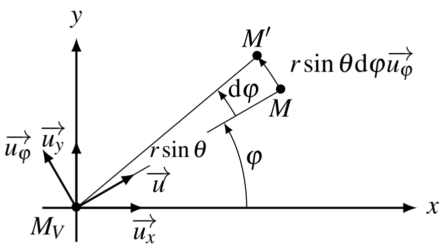

Figure 13.25 – Déplacement de M à r et θ fixés. Le déplacement a lieu sur le parallèle passant par M de rayon $M_VM = r\sin\theta$, où M_V est la projection orthogonale de M sur l'axe (Oz).

Les coordonnées r, θ et φ étant indépendantes et la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où r, θ et φ varient simultanément en sommant ces trois expressions :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}.}$$

Remarque

Le rayon d'un cercle est une distance donc une grandeur positive. $\sin\theta$ doit donc garder des valeurs positives. Pour cela, en coordonnées sphériques, θ varie dans l'intervalle $[0,\pi]$. Par suite, pour décrire l'ensemble de l'espace, φ varie sur $[0,2\pi[$.

⚠ L'orientation de l'angle θ et le choix du vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ sont liés. $\overrightarrow{u_\theta}$ est dirigé dans le sens où θ augmente. De même, l'orientation de φ et le choix du vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ sont liés. $\overrightarrow{u_\varphi}$ est dirigé dans le sens où φ augmente.

d) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\varphi}.$$

On obtient alors l'expression du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}.$$

6 Exemples de mouvements étudiés en coordonnées cartésiennes

6.1 Mouvements rectilignes

a) Mouvement rectiligne et uniforme

Exemple

Un train se déplaçant à vitesse constante sur des rails rectilignes suit un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au sol.

On considère un point M en mouvement rectiligne et uniforme de vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ constant dans le référentiel $\mathscr{R}$. Le mouvement s'inscrit sur un droite fixe $\mathscr{D}$ qui contient forcément $\overrightarrow{v_0}$.

Choix du repère Le mouvement de M est rectiligne. On repère M sur une droite comme décrit au paragraphe 2.2. On choisit l'origine O du repère sur la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ sur cette droite. En général, on s'arrange pour que $\overrightarrow{u_x}$ soit dans le sens de $\overrightarrow{v_0}$ et on projette tous les vecteurs du problème sur $\overrightarrow{u_x}$. Le mouvement de M est entièrement paramétré par son abscisse $x(t)$ que l'on doit rechercher. C'est l'équation horaire du mouvement.

Équation horaire du mouvement Les vecteurs position, vitesse et accélération sont *a priori* de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}.$$

Le mouvement de M est uniforme. Cela signifie qu'il se fait à norme de la vitesse constante. Cela implique que $\dot{x} = v_0$ à tout instant puis $\ddot{x} = 0$.
L'intégration de l'équation $\dot{x} = v_0$ donne l'équation horaire du mouvement :

$$x = v_0 t + x_0.$$

Dans cette équation, x_0 est une constante d'intégration qui s'interprète comme la coordonnée du point M à l'instant $t = 0$ puisque : $x(t = 0) = x_0$.

Bilan pour un mouvement rectiligne et uniforme d'axe (Ox)

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} = (v_0 t + x_0)\overrightarrow{u_x}.$$

Un mouvement rectiligne et uniforme est un mouvement à vecteur accélération nul : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et à vecteur vitesse constant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u_x}$. L'abscisse x de M évolue linéairement avec t sous la forme $x = v_0 t + x_0$ avec x_0 l'abscisse initiale de M.

b) Mouvement rectiligne uniformément varié

> **Exemple**
>
> L'exemple type de mouvement rectiligne uniformément varié dans le référentiel terrestre est le mouvement d'un point en chute libre dans le vide. Ce mouvement est illustré sur la figure 13.2.

On considère un point M en mouvement rectiligne dont le mouvement s'inscrit sur la droite fixe $\mathscr{D}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$. Le mouvement est uniformément varié, cela signifie que la norme de sa vitesse est une fonction affine du temps.

Choix du repère Le repère choisi est identique au précédent ; la base de projection également. Le mouvement de M est entièrement paramétré par son abscisse $x(t)$.

Équation horaire du mouvement Les vecteurs position, vitesse et accélération sont *a priori* de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}.$$

La vitesse est une fonction affine du temps. Elle s'écrit donc :

$$\dot{x} = a_0 t + v_0,$$

où v_0 est la composante de la vitesse du point M selon $\overrightarrow{u_x}$ à l'instant $t = 0$.
En dérivant cette expression, on déduit que le vecteur accélération est nécessairement constant et égal à :

$$\overrightarrow{a} = a_0 \overrightarrow{u_x}$$

à tout instant. a_0 est donc la valeur algébrique de l'accélération.

L'intégration de l'équation $\dot{x} = a_0 t + v_0$ donne l'équation horaire du mouvement :

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Dans cette équation, x_0 est une constante d'intégration qui s'interprète comme la position sur l'axe (Ox) du point M à l'instant $t = 0$ puisque $x(t = 0) = x_0$.

Bilan pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'axe (Ox)

$$\overrightarrow{a} = a_0 \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = (a_0 t + v_0) \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} = \left(a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \right) \overrightarrow{u_x}.$$

Selon les signes de v_0 et a_0, donc selon les orientations de $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{a_0}$, on a deux types de mouvements possibles :

- si $v_0 > 0$ et $a_0 > 0$, le vecteur vitesse initiale et le vecteur accélération sont de même sens. La norme de la vitesse est une fonction affine croissante du temps. Les équations horaires décrivent un **mouvement rectiligne et uniformément accéléré**. Cette situation correspond à un mobile que l'on lance verticalement vers le bas dans le référentiel terrestre, avec un axe (Ox) orienté vers le bas.
- si $v_0 < 0$ et $a_0 > 0$, le vecteur vitesse initiale et le vecteur accélération sont de sens opposés. Le mouvement se déroule en deux phases : la norme de la vitesse commence par diminuer (le mouvement est alors uniformément décéléré), s'annule (le mobile atteint un point extrême), puis recommence à augmenter (le mobile a rebroussé chemin et suit un mouvement rectiligne et uniformément accéléré). Cette situation correspond à un mobile que l'on lance verticalement vers le haut dans le référentiel terrestre, avec un axe (Ox) orienté vers le bas.

c) Généralisation : mouvement rectiligne quelconque

On considère un point M en mouvement rectiligne dans le référentiel $\mathscr{R}$. Le mouvement s'inscrit sur la droite fixe $\mathscr{D}$.

Choix du repère Le repère choisi est identique au précédent ; la base de projection également. Le mouvement de M est entièrement paramétré par son abscisse $x(t)$.

Équation horaire du mouvement Les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \dot{x} \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = \ddot{x} \overrightarrow{u_x}.$$

L'accélération $\overrightarrow{a} = \ddot{x} \overrightarrow{u_x}$ est une fonction du temps que l'on intègre pour obtenir $\dot{x}$:

$$\int_0^t \ddot{x} \mathrm{d}t = [\dot{x}]_0^t = \dot{x}(t) - \dot{x}(t = 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}(t) = \dot{x}(t = 0) + \int_0^t \ddot{x} \mathrm{d}t.$$

On déduit alors x par intégration de $\dot{x}$ par rapport au temps :

$$\int_0^t \dot{x} \mathrm{d}t = [x]_0^t = x(t) - x_{(t=0)} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = x(t = 0) + \int_0^t \dot{x} \mathrm{d}t.$$

On voit apparaître deux constantes d'intégration :

- la position de M à l'instant $t = 0$: $x(t = 0)$;
- la vitesse de M à l'instant $t = 0$: $\dot{x}(t = 0)$.

Ce sont les conditions initiales du mouvement.

6.2 Mouvements à vecteur accélération constante

> **Exemple**
>
> Sur Terre, les corps lancés dans le vide suivent un mouvement à vecteur accélération constante $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$ où $\overrightarrow{g}$ est l'accélération de la pesanteur. Ce type de mouvement a été présenté sur les chronophotographies du paragraphe 2.1. Selon la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, deux cas sont à envisager :
>
> - un mouvement rectiligne dont un exemple est donné sur la figure 13.2 ;
> - un mouvement parabolique dont un exemple est donné sur la figure 13.3.

On considère un point M dont le vecteur accélération est constant et égal à $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$ avec $\overrightarrow{g}$ indépendant du temps. On obtient alors $\overrightarrow{v}$ par intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{g}t,$$

où $\overrightarrow{v_0}$ est la vitesse de M à l'instant $t = 0$. On obtient la position en intégrant une nouvelle fois :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\overrightarrow{g}t^2.}$$

Choix de l'origine du repère On choisit pour origine du repère la position du point M à l'instant $t = 0$ de sorte que $\overrightarrow{OM_0}$ est égal à $\overrightarrow{0}$ et on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\overrightarrow{g}t^2.$$

On peut alors tracer la trajectoire de M comme sur la figure 13.26.

Le mouvement est toujours plan et on le peut décomposer en un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ et un mouvement rectiligne uniformément accéléré parallèle à $\overrightarrow{g}$.

Le mouvement est manifestement plan et on a deux possibilités :

- $\overrightarrow{v_0} \parallel \overrightarrow{g}$ ou $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$ et le mouvement est rectiligne selon la droite $(O, \overrightarrow{g})$;
- $\overrightarrow{v_0}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{g}$ et le mouvement est parabolique.

Par la suite, on n'envisage que ce deuxième cas.

Choix du repère Le mouvement est plan. On choisit le repérage cartésien décrit au paragraphe 5.1 avec (Oy) parallèle à $\overrightarrow{g}$. On peut alors projeter tous les vecteurs sur la base de projection $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Or $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u_y}$, on trouve alors :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{pmatrix} ; \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cos\alpha \, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t. \end{pmatrix}}$$

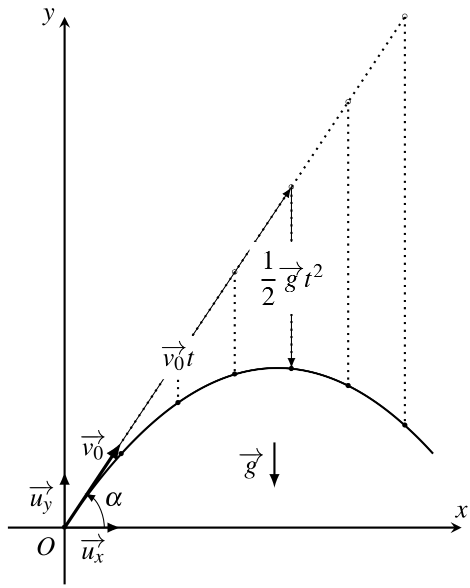

Figure 13.26 – Mouvement à accélération constante.

Les équations horaires du mouvements sont donc :

$$\begin{cases} x &= v_0 \cos\alpha \, t \\ y &= -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t. \end{cases} \tag{13.1}$$

On obtient l'équation de la trajectoire de M en éliminant t entre les deux équations. Par hypothèse, $\overrightarrow{v_0}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{g}$, de sorte que $\cos\alpha \neq 0$. On tire $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ de la première équation et on l'injecte dans la deuxième :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha \, x.$$

L'équation obtenue est celle d'une parabole : la trajectoire est parabolique.

Remarque

- Le mouvement rectiligne uniforme est un cas particulier du mouvement à accélération constante tel que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. On retrouve les équations horaires correspondante à partir des équations (13.1) en choisissant $\overrightarrow{u_x}$ parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ puis en posant $g = 0$ et $\alpha = 0$.
- Le mouvement rectiligne et uniformément varié est un cas particulier du mouvement d'accélération constante pour lequel $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{g}$ ont même direction. On retrouve les équations horaires correspondantes à partir des équations (13.1) en posant $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$ et $g = -a_0$. Le mouvement s'inscrit alors sur la droite (Oy).

6.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal : mouvement harmonique

Un mouvement rectiligne d'axe (Ox) tel que la coordonnée x du point M vérifie :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

est appelé mouvement rectiligne sinusoïdal. Ce mouvement a été étudié en détail lors de l'étude de l'oscillateur harmonique.
Du point de vue cinématique, on remarque que la vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ est telle que :

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 X_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

De même, l'accélération $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$ vaut :

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

La vitesse est donc en quadrature de phase positive avec la position (avance de phase de $\frac{\pi}{2}$) et l'accélération en opposition de phase (avance de phase de π).
À l'instant initial, la position vaut $x(t=0) = X_m \cos\varphi_0$ et la vitesse $\dot{x}(t=0) = -\omega_0 \sin\varphi_0$.
L'abscisse $x(t)$ est maximale à l'instant t_0 tel que $\omega_0 t_0 + \varphi_0 = 0$ soit $t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega_0}$.

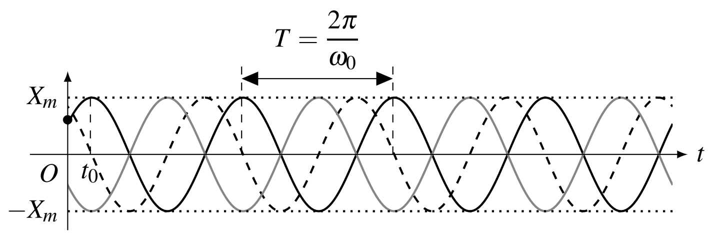

Figure 13.27 – Position, vitesse et accélération en fonction du temps lors d'un mouvement harmonique. $x(t)$ est en trait plein noir. $\frac{\dot{x}(t)}{\omega_0}$ en pointillés noirs et $\frac{\ddot{x}(t)}{\omega_0^2}$ en trait plein gris. On peut voir que $\dot{x}$ est en avance et en quadrature de phase par rapport à x et que $\ddot{x}$ est en opposition de phase avec x.

La caractéristique cinématique principale des mouvements harmoniques est que l'accélération $\ddot{x}$ et la position x sont reliées par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre du type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

7 Mouvements circulaires

7.1 Mouvement circulaire et uniforme

> **Exemple**
>
> Le mouvement d'un corps posé sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante est un mouvement circulaire et uniforme. Un exemple en est montré sur la figure 13.4 du paragraphe 2.1.

On considère un point M en mouvement circulaire et uniforme dans le référentiel $\mathscr{R}$. Le mouvement est réalisé sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R parcouru à vitesse constante (en norme).

Choix du repère Le mouvement de M est circulaire, il s'effectue donc dans un plan $\mathscr{P}$. On utilise le repérage polaire décrit au paragraphe 5.2 en choisissant le centre C du cercle $\mathscr{C}$ comme origine O du repère du plan et (Ox) un diamètre du cercle comme origine des angles. Tous les vecteurs du problème vont être projetés sur la base polaire mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Le mouvement de M étant inscrit sur un cercle de rayon R, la distance de M à l'origine O du repère est fixée à $r = R$. Le mouvement de M est entièrement paramétré par l'angle polaire $\theta(t)$ que l'on doit rechercher. C'est l'équation horaire du mouvement.

Équation horaire du mouvement Le vecteur position vaut :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}.$$

En utilisant le fait que R est constant et que $\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$, on dérive $\overrightarrow{OM}$ pour trouver :

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

$\dot{\theta}$ est appelée la **vitesse angulaire** de M. De même $\ddot{\theta}$ est appelée **accélération angulaire**.

Le mouvement de M est uniforme. Cela signifie qu'il se fait à norme de la vitesse constante. La vitesse est donc de la forme :

$$\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_\theta}.$$

Cela implique que $R\dot{\theta} = v_0$ est constante. La vitesse angulaire est constante et égale à $\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}$. On la note souvent ω_0 : $\dot{\theta} = \omega_0 = \dfrac{v_0}{R}$. La dérivation de cette relation montre que l'accélération angulaire est nulle : $\ddot{\theta} = 0$.

Son intégration permet de trouver l'équation horaire du mouvement :

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0 = \frac{v_0}{R}t + \theta_0.$$

Dans cette équation, θ_0 est une constante d'intégration qui s'interprète comme la position angulaire de M à l'instant initial. Il faut remarquer que la norme de la vitesse vaut $|v_0|$ et que le signe de v_0 ou de ω_0 donne le sens de parcourt de la trajectoire circulaire :

- si $v_0 > 0$, la trajectoire est décrite dans le sens direct ;
- si $v_0 < 0$, la trajectoire est décrite dans le sens indirect.

Bilan pour un mouvement circulaire et uniforme

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = R\omega_0\overrightarrow{u_\theta} \qquad = v_0\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} \quad = -\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$

Un mouvement circulaire et uniforme est un mouvement à accélération angulaire nulle : $\ddot{\theta} = 0$ et à vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega_0$. L'angle polaire θ évolue linéairement avec t sous la forme $\theta = \omega_0 t + \theta_0$.

La norme de la vitesse est constante et égale à $|v_0|$ mais le vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction tourne au cours du temps. L'accélération n'est donc pas nulle. Elle est radiale, centripète [1] et de norme $\dfrac{v_0^2}{R}$.

7.2 Généralisation : mouvement circulaire quelconque

On considère un point M en mouvement circulaire dans le référentiel dans $\mathscr{R}$. Le mouvement est réalisé sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R.

Choix du repère Le mouvement de M est circulaire. On utilise le même repérage polaire que précédemment et la même base polaire de projection $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Le mouvement de M étant effectué sur un cercle de rayon R, il est à nouveau entièrement paramétré par l'angle polaire $\theta(t)$ que l'on doit rechercher.

Position, vitesse et accélération Le vecteur position vaut :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}.$$

On dérive le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pour trouver la vitesse :

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

On dérive la vitesse pour trouver l'accélération en faisant attention à $\dot{\theta}$ qui, cette fois, varie au cours du temps :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta} = R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}) + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ &= -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas du mouvement circulaire et uniforme, $R\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^2}{R}$. Par ailleurs, si l'on note $v(t) = R\dot{\theta}$, on obtient $R\ddot{\theta} = \dfrac{dv}{dt}$ et on en déduit :

$$\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta}.$$

1. Un vecteur radial centripète est dirigé vers le centre de rotation O. Il est selon $-\overrightarrow{u_r}$. Un vecteur radial centrifuge fuit le centre de rotation O . Il est selon $+\overrightarrow{u_r}$.

On peut remarquer que :

- l'accélération radiale centripète de norme $\frac{v^2}{R}$ est perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers le centre du cercle. Elle est liée au fait que la trajectoire est courbe ;
- l'accélération orthoradiale $R\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$ est parallèle à la vitesse. Elle est liée aux variations de la norme de la vitesse.

Équation horaire du mouvement L'accélération angulaire est une fonction du temps $\ddot{\theta}(t)$. On trouve alors la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par intégration de $\ddot{\theta}$ par rapport au temps :

$$\int_0^t \ddot{\theta}\mathrm{d}t = \left[\dot{\theta}\right]_0^t = \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t=0) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{(0)} + \int_0^t \ddot{\theta}\mathrm{d}t.$$

On déduit alors θ par intégration de $\dot{\theta}$ par rapport au temps :

$$\int_0^t \dot{\theta}\mathrm{d}t = [\theta]_0^t = \theta(t) - \theta(t=0) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta(t) = \theta_{(0)} + \int_0^t \dot{\theta}\mathrm{d}t.$$

On voit apparaître deux constantes d'intégration :
- la position angulaire de M à l'instant $t = 0$: $\theta(t=0)$;
- la vitesse angulaire de M à l'instant $t = 0$: $\dot{\theta}(t=0)$.

Ce sont les conditions initiales du mouvement.

Bilan pour un mouvement circulaire quelconque

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} & \\ \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} & = v(t)\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} & = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta}. \end{cases}$$

8 Interprétation du vecteur accélération

8.1 Le vecteur vitesse et sa norme

Dans le langage courant, la « vitesse » est la grandeur affichée au compteur d'une voiture. Il s'agit en fait de la norme du vecteur vitesse. Le vocabulaire courant est donc souvent lié à cette norme notée v dans ce qui suit.

⚠ En physique, la vitesse désigne le vecteur vitesse et on précise lorsque l'on parle de sa norme. Le langage courant et le langage du physicien ne sont donc pas exactement identiques.

8.2 Vecteur accélération et variation de la norme de la vitesse

a) Mouvement uniforme, accéléré ou décéléré

Un mouvement est **uniforme** si la norme du vecteur vitesse est constante :

$$\text{Mouvement uniforme} \iff v = \text{constante} \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Un mouvement est **accéléré** si la norme du vecteur vitesse augmente :

$$\text{Mouvement accéléré} \iff v \nearrow \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0.$$

Un mouvement est **décéléré** si la norme du vecteur vitesse diminue :

$$\text{Mouvement décéléré} \iff v \searrow \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} < 0.$$

Si la variation de la norme de la vitesse est uniforme dans le temps c'est-à-dire que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ est une constante non nulle, le mouvement est uniformément varié. Dans ce cas, la norme de la vitesse varie linéairement avec le temps.

Le mouvement est **uniformément accéléré** si la norme de la vitesse augmente proportionnellement au temps, c'est-à-dire $v = at + b$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Le mouvement est **uniformément décéléré** si la norme de la vitesse diminue proportionnellement au temps, c'est-à-dire $v = at + b$ avec $a < 0$ et $b > 0$.

b) Lien avec le vecteur accélération

Cas d'un mouvement rectiligne On se place dans le cas d'un mouvement rectiligne d'axe (Ox). Les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires et s'écrivent $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$.

Pour analyser la situation, on suppose que $\dot{x} > 0$. Dans ce cas :

- si $\ddot{x} = 0$ à tout instant alors $\dot{x}$ reste constant. Le mouvement du mobile est uniforme ;
- si $\ddot{x} > 0$ alors $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont de même sens et $\dot{x}$ augmente. Le mouvement du mobile est accéléré ;
- si $\ddot{x} < 0$ alors $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont de sens opposés et $\dot{x}$ diminue. Le mouvement du mobile est décéléré.

On peut généraliser à l'aide du schéma ci-dessous pour un mouvement rectiligne :

- le mouvement est uniforme si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ à tout instant ;
- le mouvement est accéléré si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens ;
- le mouvement est décéléré si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés.

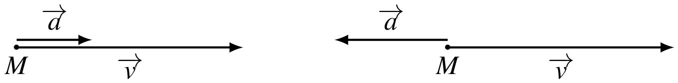

Figure 13.28 – À gauche, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens, le mouvement rectiligne est accéléré. À droite, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés, le mouvement rectiligne est décéléré.

Cas d'un mouvement quelconque L'analyse précédente reste bonne mais il ne faut pas considérer l'accélération $\overrightarrow{a}$ dans son entier mais uniquement sa projection $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ sur la trajectoire donc sur le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$:

- le mouvement est uniforme si $\overrightarrow{a_{/\!/}} = \overrightarrow{0}$ à tout instant donc si l'accélération est perpendiculaire à la trajectoire à tout instant ;
- le mouvement est accéléré si $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens ;
- le mouvement est décéléré si $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés.

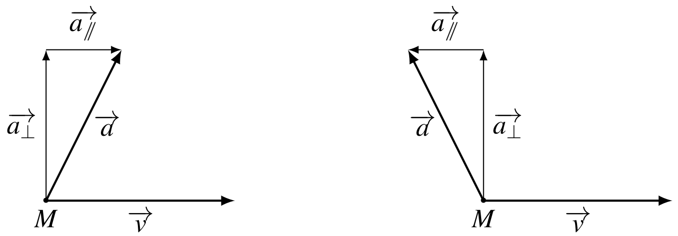

Figure 13.29 – À gauche, $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens, le mouvement est accéléré. À droite, $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés le mouvement est décéléré.

Pour justifier ce résultat, on peut remarquer que les variations de la norme de la vitesse sont les même que celles de son carré et en dérivant :

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{a_{/\!/}}+\overrightarrow{a_\perp}) = 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a_{/\!/}}$$

Le signe de la dérivée temporelle de la norme de la vitesse est donc égal au signe de $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a_{/\!/}}$.

⚠ Seuls les mouvements rectilignes et uniformes sont à vecteur accélération nul. Les mouvements uniformes en général ont seulement leur accélération perpendiculaire à la trajectoire. Il faut avoir en tête le cas du mouvement circulaire et uniforme.

8.3 Vecteur accélération et courbure de la trajectoire

Lors de l'étude des mouvements circulaires, le vecteur accélération est de la forme :

$$\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta}.$$

- L'accélération radiale centripète de norme $\frac{v^2}{R}$ est perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers le centre du cercle. Elle est liée au fait que la trajectoire est courbe.
- L'accélération orthoradiale de norme $\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$ est parallèle à la vitesse. Elle est liée aux variations de la norme de la vitesse.

Ce résultat se généralise à tout mouvement plan en décomposant le vecteur accélération en :
- une composante $\overrightarrow{a_\perp}$ perpendiculaire à la trajectoire, liée à la courbure de la trajectoire et toujours dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire ;
- une composante $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ parallèle à la trajectoire, liée à la variation de la norme de la vitesse.

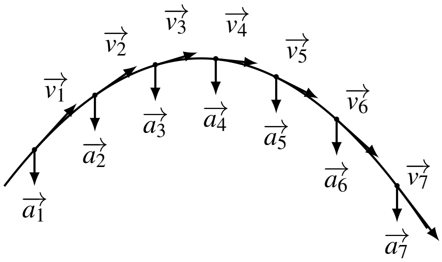

Figure 13.30 – Aux trois premier points, $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés, la norme de la vitesse diminue, le mouvement est décéléré. Aux quatre suivants, $\overrightarrow{a_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens, la norme de la vitesse augmente, le mouvement est accéléré. Le vecteur accélération pointe vers l'intérieur de la concavité.

9 Étude expérimentale de mouvements

9.1 Généralités

Pour fixer les idées, on étudie les deux mouvements plans présentés en exemple introductif au paragraphe 2.1 : le mouvement parabolique et le mouvement circulaire et uniforme.

La première étape est la réalisation de telles figures. Pour cela, on filme le mouvement avec une caméra ou un appareil photo. On adapte la couleur du fond à la couleur du mobile pour que le mobile ressorte bien sur les clichés. On dispose un mètre sur le fond pour donner une échelle aux photos. On règle alors l'appareil photo et notamment sa fréquence de prise de vue et sa vitesse d'obturation.

La fréquence de prise de vue, qui correspond au nombre de clichés réalisés en une seconde, détermine le nombre de point qui vont matérialiser la trajectoire. Il faut une vingtaine de points pour une trajectoire simple et plus si la trajectoire se complique. La fréquence de prise de vue des appareils courants varie entre 25 et 50 images par seconde, on peut donc enregistrer des mouvements d'environ une demi seconde ou plus. Pour des mouvements plus rapides, il faut un appareil photo plus rapide ou changer de technique [2].

2. Une autre technique pour obtenir de tels clichés est de se placer dans le noir total, d'éclairer le mouvement à l'aide d'un stroboscope et de réaliser un seul cliché en pose longue. Cela donne de très bons résultats, le traitement d'image est plus simple mais le cliché plus difficile à réaliser.

Le réglage de la vitesse d'obturation permet d'obtenir des prises de vue nettes et d'éviter les « flous de bougé ». En effet, si le déplacement du mobile pendant une ouverture dépasse quelques pixels sur le cliché, la photographie est floue. La vitesse d'obturation par défaut des appareils est rarement assez rapide. Il faut pouvoir régler ce paramètre.

✎ Augmenter la vitesse d'obturation provoque la diminution de la luminosité. Il faut alors éclairer de manière intense pour que le mobile soit visible sur les clichés.

9.2 Étude expérimentale en coordonnées cartésiennes

On étudie le mouvement présenté sur la figure 13.3 du paragraphe 2.1. Cette image a été réalisée par superposition de 27 clichés issus d'un film tourné à 50 images par seconde avec une vitesse d'obturation de $(1/1000)$s. Pour ce type de trajectoires, le repérage cartésien plan s'impose et on cherche les coordonnées x et y du point M à chaque instant. On s'attend à un mouvement d'accélération constante et égale à l'accélération de la pesanteur.

a) Réalisation du film

Dans un premier temps, on pose l'objet immobile devant le fond, on met en place un éclairage suffisant, et on prend un cliché pour vérifier la visibilité du mobile. On passe alors l'appareil en mode « film » et on règle la fréquence de prise de vue et la vitesse d'obturation. On pose l'appareil sur un support fixe et on cadre sur la zone du mouvement que l'on souhaite observer. On réalise alors le film du mouvement que l'on transfère sur ordinateur.

✎ Il ne faut pas oublier de coller un objet de taille connu sur le fond. Cet objet sert à déterminer l'échelle. Ici on a collé un mètre de couture sur le mur blanc du fond.

b) Transformation du film en série d'images

Il faut choisir un logiciel de traitement d'image. Un grand nombre de logiciels existent mais on propose ici d'utiliser ImageJ, logiciel Java du domaine publique utilisable sur tout type d'ordinateurs. De bons tutorats et une notice (en anglais) sont téléchargeables pour ce logiciel. La suite des opérations décrites ne prétend pas montrer l'étendue de ses possibilité mais donne un aperçu des opérations à suivre pour obtenir l'image de la figure 13.3 et les caractéristiques du mouvement.

On importe le film (File/Import/AVI ou File/Import/UsingQuickTime)[3] et on l'enregistre sous la forme d'une série d'image (File/SaveAs/ImageSequence). On obtient une série de photos prises à intervalle de temps régulier et numérotées[4].

c) Traitement des images obtenues

On importe la série d'images dans ImageJ (File/Import/ImageSequence) et on affine les réglages (Image/Adjust) pour augmenter le contraste et améliorer la visibilité. On a alors le

3. Pour éviter de saturer la mémoire de son ordinateur, il faut choisir les options Convert to 8-bit grayscale (sauf si la couleur est absolument nécessaire) et Use Virtual Stack. On recadre sur la zone des photos qui nous intéresse (sélectionner un rectangle et Image/Crop) pour réduire encore la taille des fichiers images.

4. On jette les photos sur lesquelles l'objet est hors cadre pour ne garder que les photos intéressantes.

choix entre différents traitements possibles. On a choisi ici de superposer 27 images prises à des intervalles de temps de 20 ms (Image/Stacks/ZProject option MinIntensity) pour obtenir la photo de la figure 13.3.

On définit une échelle sur l'image obtenue en traçant un trait sur l'image superposé au mètre placé en arrière-plan. On indique alors au logiciel à quelle longueur réelle correspond ce trait dans Analyse/SetScale.

Pour finir, on pointe les positions du mobile aux différents instants et on releve les positions (Analyse/Measure) dans un tableau (le logiciel le fait spontanément).

Traitement des résultats On obtient les relevés suivants pour lesquels on calcule les vitesses horizontales et verticales en assimilant la vitesse moyenne entre deux instants consécutifs à la vitesse instantanée par la formule $\dot{x}(t_i) = \dfrac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle de temps entre deux photos (ici $(1/50)\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{ms}$).

$x_{(\mathrm{mm})}$	$y_{(\mathrm{mm})}$	$t_{(\mathrm{ms})}$	$\dot{x}_{(\mathrm{m\cdot s^{-1}})}$	$\dot{y}_{(\mathrm{m\cdot s^{-1}})}$	$x_{(\mathrm{mm})}$	$y_{(\mathrm{mm})}$	$t_{(\mathrm{ms})}$	$\dot{x}_{(\mathrm{m\cdot s^{-1}})}$	$\dot{y}_{(\mathrm{m\cdot s^{-1}})}$
0,0	0,0	0	1,25	2,15	338,3	211,2	280	1,25	-1,07
25,1	43,0	20	1,16	1,97	363,4	189,7	300	1,25	-1,25
48,3	82,3	40	1,07	1,70	388,4	164,7	320	1,34	-1,43
69,8	116,3	60	1,16	1,52	415,3	136,0	340	1,25	-1,61
93,1	146,8	80	1,25	1,16	440,3	103,8	360	1,16	-1,97
118,1	170,0	100	1,25	1,07	463,6	64,4	380	1,25	-1,97
143,2	191,5	120	1,25	0,81	488,7	25,1	400	1,16	-2,15
168,3	207,6	140	1,25	0,63	511,9	-17,9	420	1,16	-2,51
193,3	220,2	160	1,25	0,36	535,2	-68,0	440	1,16	-2,86
218,4	227,3	180	1,16	0,36	558,5	-125,3	460	1,25	-3,04
241,6	234,5	200	1,34	0,18	583,5	-186,2	480	1,25	-3,40
268,5	238,1	220	1,16	-0,09	608,6	-254,2	500	1,07	-3,49
291,8	236,3	240	1,07	-0,54	630,1	-324,0	520		
313,2	225,5	260	1,25	-0,72					

Tableau 13.1 – Relevé des positions au cours du temps.

Équation de la trajectoire On peut alors tracer la courbe $y = f(x)$ à l'aide d'un tableur et trouver l'équation de la trajectoire (voir figure 13.31).

La trajectoire est une parabole qui jusitifie l'appellation de mouvement parabolique.

Évolution des vitesses verticales et horizontales On peut également tracer l'évolution temporelle de la vitesse horizontale $\dot{x}$ et celle de la vitesse verticale $\dot{y}$ (voir figure 13.32).

Le signal expérimental sur la vitesse est toujours bruité. Pour cette raison, la dérivée seconde est rarement exploitable sans lissage. Pour obtenir les accélérations horizontales et verticales, on utilise la pente des droites passant par les points de mesure.

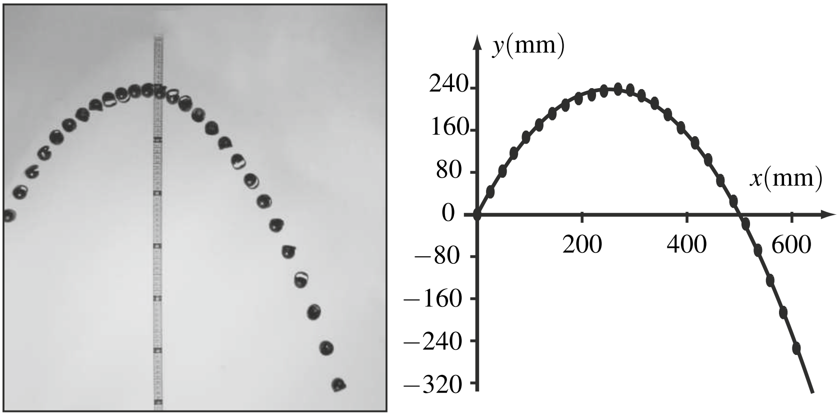

Figure 13.31 – Trajectoire du mobile. À gauche, la trajectoire photographiée ; À droite, la trajectoire reconstituée à partir des pointés réalisés. La courbe passant par les marqueurs ● est une parabole d'équation $y = 1,9x - 0,0038x^2$ avec x et y en mm.

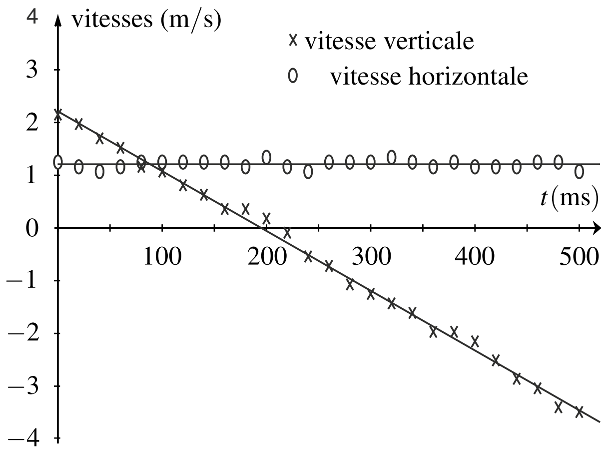

Figure 13.32 – Évolution temporelle de la vitesse horizontale $\dot{x}$ (marqueurs ○) et de la vitesse verticale (marqueurs ×). La droite horizontale passant par les marqueurs ○ a pour équation $\dot{x} = 1{,}2$ m/s. La droite décroissante passant par les marqueurs × a pour équation $\dot{y} = -0,011t + 2,21$ avec t en ms et $\dot{y}$ en m·s^{-1}.

La vitesse horizontale est quasiment constante. Sa valeur moyenne et son écart type expérimental sur les 26 mesures valent : $\dot{x} = 1{,}21\ \text{m·s}^{-1}$ et $s(\dot{x}) = 0{,}073\ \text{m·s}^{-1}$. L'incertitude élargie à un niveau de confiance de 95% vaut alors $U(\dot{x}) = 2\dfrac{s(\dot{x})}{\sqrt{n}} = 0{,}03\ \text{m·s}^{-1}$. On peut donc conclure que le mouvement horizontal est quasiment uniforme à la vitesse :

$$\dot{x} = (1,21 \pm 0,03)\text{m·s}^{-1}$$

et que l'accélération horizontale est négligeable.

La vitesse verticale évolue linéairement par rapport au temps $\dot{y} = -0,0112t + 2,21$ avec t en ms et $\dot{y}$ en m·s^{-1} soit $\dot{y} = -11,2t + 2,21$ avec t en s et $\dot{y}$ en m·s^{-1}. L'accélération verticale est donc quasiment constante et égale à :

$$\ddot{y} = (-11,2 \pm 0,4)\text{m·s}^{-2},$$

où l'intervalle de confiance à 95% sur la pente de la régression linéaire est obtenue à l'aide d'un logiciel de statistique. Le mouvement est bien un mouvement à vecteur accélération constante et égale à :

$$\overrightarrow{a} = (-11,2 \pm 0,4)\overrightarrow{u_y} \quad \text{en m·s}^{-2}.$$

Correction des erreurs de parallaxe On observe une erreur systématique par rapport à la valeur de référence de $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} = -9,8\overrightarrow{u_y}$ en m·s^{-2}. Cette erreur systématique est due à une erreur de parallaxe, courante avec ce type de méthode. Elle peut être corrigée à l'aide des lois de l'optique géométrique.

Pour cela, il faut connaître la distance focale de l'objectif de l'appareil photo (ici $f' = 50$ mm), la distance d_1 entre l'objectif et le mètre (ici $d_1 = 2{,}0$ m) et la distance d_2 entre l'objectif et le plan du mouvement de l'objet (ici $d_2 = 1{,}8$ m). Le plan du mouvement n'étant pas confondu avec le plan du mètre, ils sont grossis différemment par l'objectif. d_1 et d_2 étant tous deux grands devant la distance focale de l'objectif, on peut considérer que les images se forment sur le plan focal de l'objectif. Un objet transverse de taille $h_1 = 1$ cm, situé dans le plan du mètre, donne une image de taille $h'_1 = h_1 \dfrac{f'}{d_1}$ sur le capteur de l'appareil photo. Un objet transverse de taille h_2, situé dans le plan du mouvement, donne une image de taille $h'_2 = h_2 \dfrac{f'}{d_2}$ sur le capteur de l'appareil photo. Les images ont la même taille apparente sur la photo lorsque $h'_1 = h'_2$.

Cela signifie qu'une taille $h'_2 = h'_1$ qui correspond à une graduation de la règle sur la photographie correspond à une taille réelle $h_1 = 1$ cm sur le mur et à une taille réelle de $h_2 = h_1 \dfrac{d_2}{d_1} =$ 0,9 cm dans le plan du mouvement. Les déplacements apparents sur la photo sont surestimés dans un rapport $\dfrac{d_1}{d_2} = 2,0/1,8 = 1,1$. Ici, toutes les mesures de longueurs effectuées doivent être multipliées par $0,9$ et par conséquent l'accélération également. On trouve alors que le mouvement est à vecteur accélération constant et égal à :

$$\overrightarrow{a} = (-10,1 \pm 0,4)\overrightarrow{u_y} \quad \text{en m·s}^{-2},$$

avec un niveau de confiance proche de 95%. Cette fois, après correction de l'erreur systématique, on trouve bien une valeur de l'accélération cohérente avec la valeur tabulée.

9.3 Étude expérimentale en coordonnées polaires

On étudie maintenant le mouvement circulaire présenté sur la figure 13.4 au paragraphe 2.1. On s'attend à trouver un mouvement circulaire et uniforme de vitesse angulaire constante. C'est ce qu'on va chercher à vérifier.

Le cliché est obtenu en suivant la même démarche que précédemment et en superposant 23 images prises à des intervalles de temps de 40 ms (25 images par seconde) avec une vitesse d'obturation de $(1/500)$s.

Le mouvement est clairement circulaire. On pointe cette fois les angles polaires repérant le mobile aux différents instants à l'aide du pointeur d'angle (AngleTool) sur la figure 13.4. On relève les positions angulaires (Analyse/Measure) pour chaque position du mobile. Avec ImageJ, les angles sont donnés en degré sur l'intervalle $[0°, 180°]$. Il faut corriger les angles compris entre 180° et 360° pour obtenir la coordonnée angulaire θ définie sur la figure 13.4.

On calcule ensuite les vitesses angulaires en assimilant la vitesse angulaire moyenne entre deux instants consécutifs à la vitesse instantanée par la formule $\dot{\theta}_{(t_i)} = \dfrac{\theta(t_{i+1}) - \theta(t_i)}{\Delta t}$ où Δt est l'intervalle de temps entre deux photos (ici $(1/25)\text{s} = 40$ ms).

$\theta_{(°)}$	$\theta_{(\text{rad})}$	$t_{(\text{ms})}$	$\dot{\theta}_{(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}$	$\theta_{(°)}$	$\theta_{(\text{rad})}$	$t_{(\text{ms})}$	$\dot{\theta}_{(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}$
7	0,13	0	7,21	197	3,43	480	6,88
24	0,41	40	6,73	212	3,71	520	7,00
39	0,68	80	6,87	228	3,99	560	7,06
55	0,96	120	6,74	245	4,27	600	7,16
70	1,23	160	6,78	261	4,55	640	6,93
86	1,50	200	6,72	277	4,83	680	7,08
101	1,77	240	6,81	293	5,11	720	6,76
117	2,04	280	6,89	309	5,38	760	6,74
133	2,32	320	6,83	324	5,65	800	6,81
148	2,59	360	7,01	340	5,93	840	6,94
164	2,87	400	6,79	356	6,20	880	
180	3,14	440	7,22				

Tableau 13.2 – Relevé des positions angulaires au cours du temps.

La vitesse angulaire est quasiment constante. Sa valeur moyenne et son écart type expérimental sur les 23 mesures valent $\dot{\theta} = 6{,}91\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $s(\dot{\theta}) = 0{,}16\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. L'incertitude élargie à un niveau de confiance de 95% vaut alors $U(\dot{\theta}) = 2\dfrac{s(\dot{\theta})}{\sqrt{n}} = 0{,}07$ rad/s et on peut conclure que le mouvement est circulaire et uniforme à la vitesse angulaire constante et égale à :

$$\dot{\theta} = (6,91 \pm 0,07)\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

avec un niveau de confiance proche de 95%.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- bases de projection associées
- coordonnées d'un point
- composantes d'un vecteur
- composantes du vecteur position dans les différents systèmes de coordonnées
- vitesse moyenne ou instantanée, accélération moyenne ou instantanée
- lien entre l'évolution de la norme du vecteur et la direction du vecteur accélération
- savoir que le vecteur accélération est dirigé dans la concavité de la trajectoire

SAVOIR-FAIRE

- déterminer les vecteurs déplacements infinitésimaux dans les différents systèmes de coordonnées et en déduire le vecteur vitesse
- projeter un vecteur sur une base
- dériver les vecteurs de la base polaire mobile
- déterminer les vecteurs vitesse et accélération instantanées en coordonnées cartésiennes et cylindriques par dérivation du vecteur position
- choisir un système de coordonnées adapté au problème posé
- exprimer la vitesse et la position en fonction du temps et déterminer la trajectoire en coordonnées cartésiennes d'un mouvement de vecteur-accélération constante
- exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires planes d'un mouvement circulaire et uniforme

MOTS-CLÉS

- référentiel
- repère
- base
- coordonnées
- composantes
- trajectoire
- mouvement uniforme